Adı Soyadı: 25.04.2022
Numarası:

2021-2022 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II ARA SINAV SORULARI

1) a) R bir halka olsun. R'nin değişmeli olması için gerek ve yeter şart $\forall a,b\in R$ için $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ olmasıdır, gösteriniz.

   b) Birimli bir halkanın birimsel elemanlarının kümesi U olsun. U'nun çarpımsal kapalı olduğunu gösteriniz.

2) a) Halka homomorfizmasını tarif ediniz. Aşikar olmayan bir halka homomorfizması örneği verip bu örneğin homomorfizma olduğunu gösteriniz.

   b) $5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_{12}/(\overline{7})$ kümelerinin bütün elemanlarını belirleyiniz.

3) $m,n\in\mathbb{Z}$ için $obeb(m,n)=d$, $okek(m,n)=k$ olsun. $(m)+(n)=(d),(m)\cap(n)=(k)$ olduğunu gösteriniz.

4) a) $T=\left\{\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}:(a,\,b)=1\ ve\ 5\nmid b\right\}$ ve $I=\left\{\dfrac{a}{b}\in T:\ 5\mid a\right\}$ kümeleri veriliyor. I, T'nin bir ideali olur mu? Araştırınız.

   b) $\overline{0},\overline{1}\in\mathbb{Z}_2$, $S=\{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$ kümesi veriliyor. S üzerinde toplama ve çarpma işlemleri

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b).(c,d)=(ad+bc+bd,ad+bc+ac)$$

ile veriliyor. S kümesinin toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka olduğu bilindiğine göre S cisim olur mu? Araştırınız

5) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

Başarılar
Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1) a) $\Rightarrow$ R değişmeli bir halka olsun.

$\forall a,b \in R$ için $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ old. gösterelim

$$(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b)$$
$$= a^2-ab+ba-b^2$$
$$= a^2-b^2$$

$\Leftarrow$ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ olsun. Biz R'nin değişmeli old gösterelim. $\forall a,b \in R$ için

$$a^2-b^2 = a^2-ab+ba-b^2 \Rightarrow ba=ab$$ olup.

R değişmelidir.

b) (Teorem). Notlarınızda ispatı mevcuttur (Teorem 1.1.14 iii))

2) a) Tanım (Halka Homomorfizması): $(R,+,\cdot)$ ve $(R',\oplus,\odot)$ iki halka ve $f: R \to R'$ ne bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a,b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a)\oplus f(b)$$
$$f(a.b) = f(a)\odot f(b)$$

oluyor ise f'ye R den R'ye bir halka homomorfizması denir.

Örneğin $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $f(n)=(n,0)$ ile tanımlı f fonksiyonu bir homomorfizmadır. Çünkü $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ için

$$f(n+m) = (n+m,0) = (n,0)+(m,0) = f(n)+f(m)$$
$$f(n.m) = (n.m,0) = (n,0)\cdot(m,0) = f(n).f(m)$$

Farklı örnekler de verilebilir

b) $$5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{a+15\mathbb{Z} \mid a\in 5\mathbb{Z}\} = \{0+15\mathbb{Z}, 5+15\mathbb{Z}, 10+15\mathbb{Z}\}$$
$$= \{15\mathbb{Z}, 5+15\mathbb{Z}, 10+15\mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}/(\bar{7}) = \{a+(\bar{7}) \mid a\in\mathbb{Z}_{12}\}$$
$$= \{(\bar{7}), 1+(\bar{7}), 2+(\bar{7}), 3+(\bar{7}), 4+(\bar{7}), 5+(\bar{7}), 6+(\bar{7})\}$$

3) (Teorem). Ders notlarında İspatı mevcuttur
Ders 5 (Teorem 1.2.28 ve Teorem 1.2.23)'ün özel hali)

4) a) $T = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : (a,b)=1 \text{ ve } 5 \nmid b \right\}$

$I = \left\{ \frac{a}{b} \in T : 5 \mid a \right\}$

I, T'nin ideali olur mu?

* $I \neq \emptyset$: $a=5$, $b=7$ alınırsa $\frac{5}{7} \in I$ olup $I \neq \emptyset$.
* $I \subseteq T$: I'nın tanımından açık.

- Şimdi de $\forall x,y \in I$ için $x-y \in I$ olur mu? gösterelim

$x,y \in I$ ise $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$ $\Rightarrow 5 \mid a \wedge 5 \mid c$ yazılabilir

$5 \nmid b \wedge 5 \nmid d \Rightarrow 5 \nmid bd$

$\Rightarrow a=5k$, $c=5l$ o.ş $k,l \in \mathbb{Z}$ var

$\Rightarrow x-y = \frac{ad-bc}{bd} = \frac{5kd-5lb}{bd}$

$= \frac{5(kd-lb)}{bd} \in I$

- Şimdi de $\forall x \in T$ ve $\forall y \in I$ için

$xy \in I \wedge y.x \in I$ olduğunu göstermeliyiz

$x=\frac{a}{b} \wedge y=\frac{c}{d}$ alınırsa $5 \mid c \wedge 5 \nmid b \wedge (a,b)=1 \wedge 5 \nmid d$

yazılabilir. Yani $c=5k$ o.ş $k \in \mathbb{Z}$ vardır $5 \nmid bd$ olur

$xy = \frac{ac}{bd} = \frac{5ka}{bd} \in I \wedge yx = \frac{ca}{db} = \frac{5ka}{db} \in I$ olup

I, T'nin ideali olur

4) b) $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$, $S = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1})\}$

$(S,+,\cdot)$ halkası cisim olur mu?

Bu halkanın cisim olması için birimli, değişmeli ve halkanın sıfırından farklı her elemanın terslenebilir olması gerekir

Öncelikle halka değişmeli olur mu?

$\forall (a,b),(c,d) \in S$ için $(a,b).(c,d) = (c,d).(a,b)$

olur mu?

$(a,b).(c,d) = (ad+bc+bd,\ ad+bc+ac)$

$= (da+cb+db,\ da+cb+ca)$

$= (cb+da+db,\ cb+da+ca)$

$= (c,d).(a,b)$ olup halka değişmelidir.

Halka birimli olur mu?

$\forall (a,b) \in S$ için $(a,b).(e_1,e_2) = (a,b)$ o.ş $(e_1,e_2) \in S$

var mıdır?

$(a,b).(e_1,e_2) = (ae_2+be_1+be_2,\ ae_2+be_1+ae_1)$

$= (a,b)$ olması için

$e_2 = \bar{1} \wedge e_1+e_2 = \bar{0}$, benzer şekilde $e_2+e_1 = \bar{0}$, $e_1 = \bar{1}$

olmalıdır. O halde $(e_1,e_2) = (\bar{1},\bar{1}) \in S$ olup birim

eleman vardır. Şimdi de $(\bar{0},\bar{0})$ dışındaki her eleman

terslenebilir olur mu? Araştıralım.

$(\bar{1},\bar{1})$ birim eleman old. tersi vardır ve kendisine

eşittir. $(\bar{0},\bar{1}).(a,b) = (\bar{1},\bar{1})$ o.ş $(a,b) \in S$ var mı?

$(\bar{0},\bar{1}) \in S$ için $(\bar{0},\bar{1}).(\bar{1},\bar{0}) = (\bar{0}+\bar{1}+\bar{0},\ \bar{0}+\bar{1}+\bar{0})$

$(a,b) = (\bar{1},\bar{0})$ alınırsa $= (\bar{1},\bar{1})$ bulunur. O halde

yani $(\bar{0},\bar{1})$ ve $(\bar{1},\bar{0})$ birbirlerinin tersidir.

S bir cisimdir.

5) Teorem kullanarak gösterelim. $\forall a \in \mathbb{Z}$ için

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$f(a) = (a+3\mathbb{Z},\ a+7\mathbb{Z})$ ile tanımlayalım. f'nin

fonksiyon old. tanımdan açıktır.

f homomorfizmadır: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için

$f(a+b) = (a+b+3\mathbb{Z}, a+b+7\mathbb{Z})$
$= (a+3\mathbb{Z}+b+3\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}+b+7\mathbb{Z})$
$= (a+3\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}) + (b+3\mathbb{Z}, b+7\mathbb{Z})$
$= f(a) + f(b)$

$f(a.b) = (ab+3\mathbb{Z}, ab+7\mathbb{Z})$
$= ((a+3\mathbb{Z})(b+3\mathbb{Z}), (a+7\mathbb{Z})(b+7\mathbb{Z}))$
$= (a+3\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}) \cdot (b+3\mathbb{Z}, b+7\mathbb{Z})$
$= f(a) \cdot f(b)$

f örtendir: $\forall (a+3\mathbb{Z}, b+7\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ için

alınırsa $a,b \in \mathbb{Z}$ old. $\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle + \langle 7 \rangle$. $x,y,x',y' \in \mathbb{Z}$ vardır
$a = 3x+7y \wedge b = 3x'+7y'$ o.ş.

$f(3x'+7y) = (3x'+7y+3\mathbb{Z}, 3x'+7y+7\mathbb{Z})$
$= (7y+3\mathbb{Z}, 3x'+7\mathbb{Z})$ o.ş. $\exists 3x'+7y \in \mathbb{Z}$ var
$= (a+3\mathbb{Z}, b+7\mathbb{Z})$

old f örtendir.
Teoreme göre $\mathbb{Z}/_{\text{Çek} f} \cong \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$

$\text{Çek } f = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = (3\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z})\}$
$= \{a \in \mathbb{Z} \mid (a+3\mathbb{Z}, a+7\mathbb{Z}) = (3\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z})\}$
$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in 3\mathbb{Z} \wedge a \in 7\mathbb{Z}\}$
$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 3k \wedge a = 7l \text{ o.ş. } k,l \in \mathbb{Z}\}$
$= \{a \in \mathbb{Z} \quad\} = 21\mathbb{Z}$.
$= \{21t \mid t \in \mathbb{Z}\}$

bulunur

Teoreme göre $\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$